الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

الدالة اللوغارتمية النبيرية

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

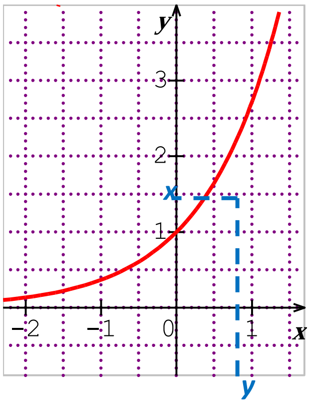
مختار مختاري

السنة الجامعية

2023 - 2022

1 الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

اللوغاريتم النيبيري:



1.1 تعاريف وَ نتائج:

الدالة الأسية exp متزايدة تماما و مستمرة على $\mathbb{R}$ ؛

بالإضافة إلى ذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

نستنتج حسب تعميم مبرهنة القيم المتوسطة، أن صورة $\mathbb{R}$

بالدالة exp هي المجال $]0,+\infty[$.

لدينا كذلك من أجل كل $x > 0$، يوجد عدد حقيقي وحيد y بحيث $e^y = x$.

يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد x" ونرمز له بالرمز $\ln x$، و هو العدد الذي أسيته x.

لدينا: $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$.

نتائج:

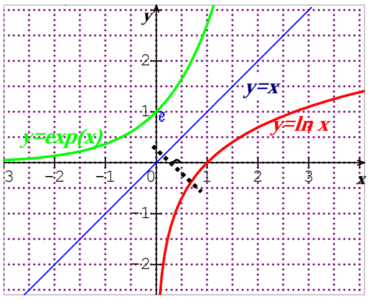
1. $\ln x \in \mathbb{R}$ معناه $x > 0$.
2. من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $e^{\ln x} = x$.
3. من أجل كل عدد حقيقي x: $\ln e^x = x$.
4. $\ln 1 = 0$ وَ $\ln e = 1$.

مبرهنة:

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x و من أجل كل عدد حقيقي y: $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$.

1.2 منحنى الدالة:

خاصية:



في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتم النيبيري متناظران بالنسبة للمنصف

الأول (المستقيم ذو معادلة $y = x$).

1.3 دالة اللوغاريتم النيبيري :

تعريف:

الدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

تعريف:

نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بالرمز " ln " الدالة الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ و التي تنعدم من أجل عند 1.

ترميز:

نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد x من $]0;+\infty[$ بـِ $\ln(x)$ و أحيانا $\ln x$.

لدينا هكذا: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

ملاحظة:

يمكننا تعريف الدالة اللوغارتمية بأنها مساحة الحيز المستوي تحت منحنى الدالة مقلوب $t \mapsto \frac{1}{t}$ بين 1 و x مع x موجب.

تطبيق (تذكير):

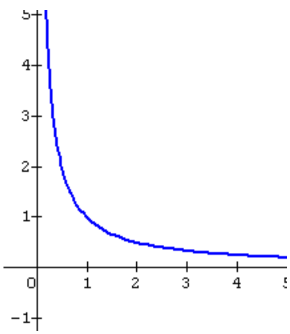
نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $g(x) = \frac{1}{x}$

1. أرسم التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد و متجانس .

(الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$).

2. أثبت أن الدالة g تقبل دالة أصلية f على المجال $]0;+\infty[$.

(بما أن الدالة g ناطقة فهي دالة مستمرة على مجموعة تعريفها $]0;+\infty[$ وبالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية) .



3. ما هي إشارة العدد الحقيقي $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

(لدينا $x>0$ و منه $\frac{1}{x}>0$ إذن $g(x)>0$) .

4. استنتج جدول تغيرات الدالة f .

(بما أن $g(x)>0$ إذن f دالة متزايدة تماما).

1.4 الخواص الجبرية :

الخاصية الأساسية :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان:

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

نضع: $\alpha=\ln a$ و $\beta=\ln b$ معناه $e^{\alpha}=a$ و $e^{\beta}=b$.

لدينا:

$$a\times b=e^{\alpha}\times e^{\beta}=e^{\alpha+\beta} \quad \text{معناه} \quad \alpha+\beta=\ln(ab)$$

أي $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

ملاحظة:

$ab>0$ معناه ($a>0$ و $b>0$) أو ($a<0$ و $b<0$) وبالتالي $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$.

ملاحظة:

يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2،....، a_n من $]0;+\infty[$، $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

1.5 نتائج :

نتيجة1:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

1. a عدد حقيقي موجب تماما لدنيا :

$$1=a\times\frac{1}{a}\Leftrightarrow \ln 1=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0=\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

و بالتالي $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

2. a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)$$
$$=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

و بالتالي $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة:

$ab>0$ معناه $(a>0$ و $b>0)$ أو $(a<0$ و $b<0)$ وبالتالي $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$.

نتيجة2:

من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{Z}$، $\ln(a^n)=n\ln a$.

نتيجة3:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$: $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

نتيجة4:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $a<b \Leftrightarrow \ln a<\ln b$.

ملاحظة :

1. $a^n>0$: $\ln(a^n)=n\ln|a|$.
2. إذا كان n عدد صحيح زوجي: $\ln(a^n)=n\ln|a|$.
3. إذا كان n عدد صحيح فردي : $\ln(a^n)=n\ln a$.

ملاحظة :

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a=c \Leftrightarrow a=e^c$.
2. $\ln a<c \Leftrightarrow a<e^c$.

1.6 حل معادلات و متراجحات:

مثال 1 :

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

1. $\ln(2x-1)=2$ ...... (1)
2. $\ln(x-1)\geq -3$ ...... (2)
3. $\ln(x+2)\leq 5$ ...... (3)

الحل :

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $2x-1>0$ أي $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$$\ln(2x-1)=2 \Leftrightarrow 2x-1=e^2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1+e^2}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$.

2. المتراجحة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x-1>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln(x-1)\geq -3 \Leftrightarrow x-1>e^{-3}$$
$$\Leftrightarrow x>e^{-3}+1$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$.

3. المتراجحة (3) لها معنى إذا و فقط إذا كان $\ln(x+2)\leq 5$ أي $D=]-2;+\infty[$.

$$\ln(x+2)\leq 5 \Leftrightarrow x+2\leq e^5$$
$$\Leftrightarrow x\leq e^5-2$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي $S=]-2;e^5-2]$.

مثال 2 :

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

1. $\ln(x^2-1)=\ln(x)$ .... (1)
2. $\ln(x^2-1)\leq\ln(x)$ ...... (2)

الحل:

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2-1>0$ و $x>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln(x^2-1)=\ln(x) \Leftrightarrow x^2-1=x$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D. و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. المتراجحة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $x^2-1>0$ و $x>0$ أي $D=]1;+\infty[$.

$$\ln(x^2-1)\leq\ln(x) \Leftrightarrow x^2-1\leq x$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-1\leq 0$$

مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\le 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $S=\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

مثال 3 :

حل المعادلتين:

1. $\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2 \quad .....(1)$
2. $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 \quad .....(2)$.

الحل:

1. المعادلة (1) لها معنى إذا و فقط إذا كان $(x-1)(x+2)>0$ أي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2 &\Leftrightarrow \ln(x-1)(x+2)=\ln 4\\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=4\\ &\Leftrightarrow x^2+x-6=0\end{aligned}$$

حلول المعادلة $x^2+x-6=0$ هما -3 و 2 ينتميان إلى D.

و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

2. المعادلة (2) لها معنى إذا و فقط إذا كان $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ أي $D=]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 &\Leftrightarrow \ln(x-1)(x+2)=\ln 4\\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=4\\ &\Leftrightarrow x^2+x-6=0\end{aligned}$$

حلول المعادلة $x^2+x-6=0$ هما -3 و 2 الحل 2 مقبول لأنه ينتمي إلى D و الحل -3 غير مقبول لأنه لا ينتمي إلى D.

1.7 دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري :

النهايات عند 0^+ و عند $+\infty$:

مبرهنة :

1. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

تعميم :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln\left(u(x)\right) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(u(x)\right) = +\infty$.

1.8 التزايد المقارن:

من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد طبيعي p:

مبرهنات:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0^+$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{(\ln x)^p} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0^-$ ؛ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^n (\ln x)^p = 0^-$.
4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

تعميم:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\left[\ln\left(u(x)\right)\right]^p}{\left[u(x)\right]^n} = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\left[u(x)\right]^n}{\left[\ln\left(u(x)\right)\right]^p} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x)\right]^n \left[\ln\left(u(x)\right)\right]^p = 0$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln\left(u(x)\right)}{u(x)-1} = 1$.

البرهان:

تذكير: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

نضع: $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$.

1. لدينا: $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0^+$.
2. لدينا: $\lim\limits_{y\overset{>}{\longrightarrow}0}\ln y=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}y\ln y=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$.
3. لدينا: $\lim\limits_{y\to1}\ln y=0$ ومنه: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln y}{y-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$.

جدول التغيرات:

- دالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$.

x	0	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$	
$\ln x$	$\|\|$ $-\infty$	0	$+\infty$

البرهان:

نضع: $f(x)=\ln x$

لدينا: $f(x)=\ln x \Leftrightarrow x=e^x$

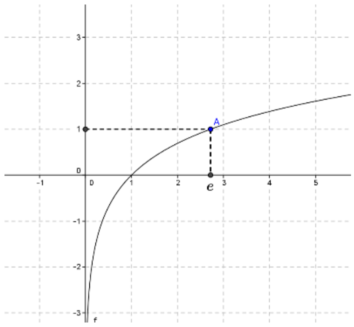
و منه

$$x=e^{f(x)}\Leftrightarrow 1=f'(x).e^{f(x)}$$
$$\Leftrightarrow 1=f'(x).x$$

وبالتالي: $f\,'(x)=\frac{1}{x}$

○ من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\frac{1}{x}>0$ و منه الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

التمثيل البياني :



ليكن (C) التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المنحني (C) الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقار لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta):y=x-1$.

1.9 العدد e :

الدالة " $\ln$ " مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$. نرمز إلى هذا الحل بالرمز " e ".

تعريف:

العدد e هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1. $(\ln e=1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.

إشارة $\ln(x)$:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

$\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$.

$\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

1.10 دراسة دالة $\ln\circ u$:

النهايات :

لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بِـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$

أي $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x-2)=+\infty$
- أي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

اتجاه التغيرات :

خاصية:

إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بِـ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بِـ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

1.11 المشتقة و دوال أصلية :

خاصية:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

البرهان:

نضع: $f(x)=(\ln\circ u)(x)$.

f مركب دالتين مستمرتين و قابلتين للاشتقاق على I و بالتالي f مستمرة و قابلة للاشتقاق على I:

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= u\,'(x) \times \ln'\left(u(x)\right) \\ &= u\,'(x) \times \frac{1}{u(x)} \\ &= \frac{u\,'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

مثال:

1. مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$
2. الدالة F حيث $F(x)=\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=\frac{2}{2x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ملاحظة:

في حالة ما إذا كانت الدالة u دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق و سالبة تماما على المجال I، الدالة $-f$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال I وبالتالي الدالة $\ln\circ(-u)$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I و

$$\begin{aligned} \left(\ln\circ(-u)\right)'(x) &= \frac{-u\,'(x)}{-u(x)} \\ &= \frac{u\,'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

الخلاصة:

u دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق وغير معدومة على المجال I.

الدالة f المعرفة على I بـ: $f(x)=\left|u(x)\right|$ مستمرة و قابلة للاشتقاق على I و $f\,'(x)=\frac{u\,'(x)}{u(x)}$.

تطبيق 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بِ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند $\frac{1}{2}$ و عند $+\infty$.
2. أحسب $f'(x)$.
3. . عين معادلة لِ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل :

1. حساب النهايات: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. حساب $f'(x)$: $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[; f'(x) = 1 + \frac{6}{2x-1}$
3. معادلة المماس ، لدينا $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ومنه $y = 7x - 6$.

تطبيق 2 :

عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي: $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \ln(x^2)$

الحل :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ و منه مجموعة تعريف f هي $D_f =]-1;+\infty[$.

تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x \neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

1.12 تمارين :

التمرين الأول:

أحسب مشتقة الدالة f وعين اتجاه تغيرها في الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln(x+3)$.
2) $f(x)=x-\ln(x+4)$.
3) $f(x)=x-\ln x$.
4) $f(x)=2x-5+\ln x$.
5) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$.
6) $f(x)=\ln(x^2-1)$.
7) $f(x)=-3x+\ln x$.
8) $f(x)=x+\ln(x+2)$

التمرين الثاني :

f دالة عددية معرفة على $D_f=]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=\ln(x^2+4x)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2) أحسب مشتقة الدالة f وعين اتجاه تغيرها ، ثم أكتب جدول تغيراتها.
3) عين تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .
4) أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
5) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ محور تناظر لـ (C_f).
6) أرسم (Δ) و (C_f).

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$.

- أدرس تغيرات الدالة g.
- أدرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ حيث :. $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها
- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.
- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).
- أنشئ (C_f) و (Δ).

التمرين الرابع :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2-1+2\ln x$.

- أدرس تغيرات الدالة g.
- أحسب $g(1)$ ثم أدرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على: $]0,+\infty[$ حيث : $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\ln x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم أكتب جدول تغيراتها
- حدد الفروع اللانهائية للمنحني (C_f).
- أنشئ (C_f) و (Δ).

التمرين الخامس :

الجزء الأول:

g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=ax+b+\ln x$.

عين a و b علما ان جدول تغيرات g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

الجزء الثاني:

f دالة عددية معرفة على: $]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=-x^2-2x+2x\ln x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) أحسب مشتقة الدالة f وبين أن : $f'(x)=2g(x)$.

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم أكتب جدول تغيراتها .

د) حدد الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) .

هـ) أنشئ (C_f) و (Δ).

التمرين السادس :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) حلل $f(x)$ الى جداء عاملين .

3) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$

4) أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f

التمرين السابع:

ليكن $P(x)$ كثير الحدود حيث : $P(x)=2x^2-5x+2$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

2) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ حلول المتراجحة التالية : $2(\ln(x))^2-5\ln(x)+2>0$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2^{2x+1}=5\times 2^x-2$

التمرين الثامن:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ $g(x)=x+1+\ln x$

1. عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.
4. حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f

3) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. تحقق أن $f(\alpha)=-\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ).

الفهرس